L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

L'inégalité isopérimétrique

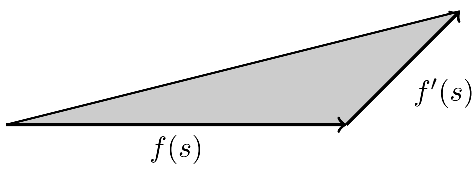
Soient L un réel strictement positif et f une fonction de $[0, L]$ dans $\mathbb{C}$, dérivable par morceaux et dont la dérivée f' est un élément de $\mathrm{L}^2([0, L])$.

1. Montrer que
$$\int_0^L \overline{f(s)} f'(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{L}{2\pi}\int_0^L |f'(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

2. Soit γ une courbe de $[0,1] \to \mathbb{C}$, continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux (on notera par I l'ensemble des points où γ n'est pas dérivable), fermée (c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$) et sans point multiple (c'est-à-dire γ est injective sur $[0, 1[$). La longueur totale de la courbe sera désignée par L :
$$L := \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
On définit ϕ sur $[0, 1]$ par
$$\forall t \in [0,1], \qquad \phi(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u.$$
Montrer que ϕ est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, L]$.

3. On définit f sur $[0, L]$ par,
$$\forall s \in [0, L], \qquad f(s) = \gamma\left(\phi^{-1}(s)\right).$$
Montrer que f est une fonction de $[0, L]$ dans $\mathbb{C}$, continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, fermée, sans point multiple et vérifiant
$$\forall s \in [0, L] \setminus \phi(I), \qquad |f'(s)| = 1.$$

4. Justifier que l'aire du triangle suivant :



est donnée par le demi produit vectoriel : $\frac{f(s)\wedge f'(s)}{2}$.

5. On considère les deux exemples suivants de courbes. Pour $L > 0$ fixé et $L/2 > a > 0$:
$$f_1(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in [0, a] \\ a + i\,(s-a) & \text{si } s \in [a, L/2] \\ a + \frac{L}{2} - s + i\left(\frac{L}{2} - a\right) & \text{si } s \in [L/2, a + L/2] \\ i\,(L-s) & \text{si } s \in [a + L/2, L] \end{cases}$$
et
$$f_2(s) = \frac{L}{2\pi}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{L}s} \qquad \forall s \in [0, L].$$
Tracer ces deux courbes et vérifier que f_1 et f_2 satisfont les mêmes hypothèses que f.

6. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine intérieur délimité par la courbe f. Vérifier la formule de Stockes

$$\mathscr{A} = \left| \int_0^L \frac{f(s) \wedge f'(s)}{2} \, \mathrm{d}s \right|,$$

   pour les deux exemples f_1 et f_2.

7. Montrer que

$$\mathscr{A} = \left| \frac{1}{2} Im \left(\int_0^L \overline{f(s)} f'(s) \, \mathrm{d}s \right) \right|.$$

8. En déduire l'inégalité isopérimétrique :

$$4\pi\mathscr{A} \leqslant L^2.$$

9. Montrer que l'on a égalité $4\pi\mathscr{A} = L^2$ si et seulement si la courbe est un cercle.